Взгляд и нечто

Н. Н. Красовский

Во избежание недоразумений я должен предуведомить, что материалом доклада явятся не те или иные результаты моих научных исследований в моей профессиональной области «прикладная математика, механика, теория устойчивости движения и теория управления».

Я ограничусь некоторыми соображениями о преподавании математики и информатики в средней школе. Эти соображения являются субъективными и выведены мной из многолетнего опыта работы со школьниками и учителями. При этом я буду иметь в виду и опыт работы с учащимися и учителями в классах с повышенной математической подготовкой, так и в классах в массовой средней школе.

Основной тезис этого доклада таков. В настоящее время проявляется тенденция объединять различные естественно-научные дисциплины в школе: физика, химия, биология – в некое единое целое под названием «естествознание». Я не специалист в области естествознания, но такая тенденция беспокоит, так как мне представляется, что могут стереться некоторые важные черты отдельных самостоятельных больших разделов человеческого знания. Однако тесное сближение школьной математики и информатики представляется весьма целесообразным. Более того, формирование некой единой образовательной области под названием, например, «экспериментальная математика» представляется неизбежным. Разумеется, при этом не имеется в виду ни в коей мере снижение сложившихся в стране высоких стандартов преподавания математики, ни ослабление тенденций к использованию все более и более совершенных информационных технологий. Поэтому в докладе я собираюсь разобрать некоторые задачи и высказать некоторые общие соображения об органическом объединении математики, информатики и логики в некоем органическом единстве.

Я начну с задачки, которую предложил Дамир Яковлевич Шараев для заочного тура нашей областной школьной олимпиады по информатике в прошлом году. При этом я разберу ее с удобной для меня точки зрения. Я спросил на это разрешения у Дамира Яковлевича. Он сказал, что моя трактовка задачи не вызывает у него возражения.

Задачка такова. *На плато приземляются 4 объекта. Известно, что*

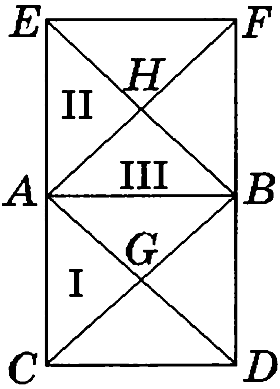

Рис. 1

они должны приземлиться по углам некоторого квадрата, сторона которого, однако, не известна заранее. Командир этой эскадрильи приземлился в точке A, и он знает координаты этой точки. Он провел перекличку, чтобы выяснить координаты остальных углов, в которых приземлились его пилоты. Он получил ответ только от одного из пилотов, который указал координаты той точки, где он приземлился. Назовем этот угол квадрата точкой B (рис. 1.) Командиру не известно, то ли отрезок AB есть сторона квадрата ABFE, то ли этот отрезок есть сторона квадрата ABDC, то ли это диагональ квадрата AGBH. Будем считать длину отрезка AB равной 1, т. е. примем длину этого отрезка за единицу измерения. Командир решил облететь район приземления с тем, чтобы рассеять указанные сомнения. При этом он должен обязательно облететь все точки, где на самом деле приземлились его пилоты, и вернуться в свое исходное положение, спланировав такой порядок облета гипотетических точек приземления, при котором суммарный путь его облета окажется наименьшим из возможных.

Формализуем задачу как минимаксную или максиминную по критерию наименьшего облетного избытка пути, неизбежного из-за недостатка априорной информации. Что я имею в виду? Будем трактовать облет как игру между командиром эскадрильи и «природой». Рассмотрим эту игру в форме управления по принципу обратной связи и притом в чистых стратегиях. Каждый из «партнеров» в пределах понятия максимина или минимакса при выборе каждого следующего шага своих действий может использовать информацию, которая накопилась у него к данному моменту в процессе предыдущих действий. Командир эскадрильи старается прокладывать маршрут так, чтобы путь, который ему придется совершить, оказался по возможности поменьше, а «природа», напротив, «старается» действовать так, чтобы заставить командира эскадрильи пролететь путь побольше.

Начну с максиминной постановки задачи. Тогда у природы есть 3 стратегии V:

V = I. Выбор квадрата ABDC;

V = II. Выбор квадрата ABFE;

V = III. Выбор квадрата AGBH.

А у командира корабля имеется набор стратегий $\{U\}$, каждая из которых есть ответ на выбор «природой» стратегии I, или II, или III. В такой формализации не исключается, что командир может угадать, какую стратегию избрала «природа». Пусть γ есть избыточный путь сверх необходимого, который придется пролететь командиру корабля при том или ином выборе стратегий им и «природой». Получаем задачу о величине

$$w_0 = \max_{I, II, III} \min_{\{U\}} \gamma$$

Очевидно, $w_0 = 0$, так как, угадав стратегию природы, командир эскадрильи выберет маршрут, при котором он не должен будет пройти никакого лишнего пути.

Обратимся к минимаксной постановке задачи. Теперь сначала свою стратегию U выбирает командир эскадрильи среди набора $\{U\}$ доступных ему стратегий, и при этой выбранной стратегии U командир может столкнуться с любой стратегией, доступной для природы. Здесь уже не исключается, что, наоборот, «природа» может угадать, какую стратегию выбрал командир эскадрильи. У командира остается только возможность, выбирая свою стратегию, предусмотреть, что «природа» может предугадать его стратегию и выбирать свои действия (стратегию V) так, чтобы максимизировать величину γ. Теперь получаем задачу о величине

$$w^0 = \min_{\{U\}} \max_{\{V\}} \gamma.$$

Первый шаг командира может состоять в выборе одной из 3 возможностей: либо выбрать в качестве первого отрезка пути AC, либо – AE, либо – AG. Обсудим выбор AC. Если в точке C выяснится: «да, один из кораблей приземлился в точке C» – тогда вопросов больше нет. Ясно, что корабли приземлились по углам квадрата ACDB. После точки C командир облетает точки D, B и возвращается в точку A. В этом случае он обойдется без избытка пути, и получится $\gamma=0$. Однако рассчитывать на такое благорасположение природы не будем. Поэтому рассмотрим случай, когда в точке C выясняется: «нет, в точке C ни один корабль не приземлился». Тогда командиру эскадрильи представляются две возможности: либо вернуться в точку A и начать облет заново, либо полететь в точку G. Интуиция подсказывает, что выгоднее лететь в точку G. Если в точке G выяснится, что там приземлился один из кораблей, то ясно, что корабли приземлились в точках A, G, B, H и дальнейший путь облета складывается из отрезков GB, BH и HA. Тогда избыточный путь из-за недостатка априорной информации – величина γ – окажется равной пути AC, т. е. при выбранной системе измерения длины $\gamma = 1$. Однако пусть опять командир эскадрильи узнает, что «нет, в точке G никакой корабль не приземлился». Тогда ясно, что корабли приземлились по углам квадрата ABFE. В этом случае командир выбирает дальнейший путь облета таким: GB, BF, FE, EA. Теперь избыточный путь оказывается равным длине отрезка CB, т. е. $\gamma = \sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Можно убедиться, что у командира эскадрильи никакого другого способа действий, который бы гарантировал ему избыточный путь меньший, чем $\sqrt{2}$, нет. Таким образом, получаем

$$w^0 = \sqrt{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 1{,}41.$$

Обобщим задачу. *Предположим, что число кораблей $n \geq 4$ и они должны приземлиться по углам правильного n-угольника, стороны которого опять будем считать заранее неизвестными. Пусть снова командир эскадрильи приземлился в точке A, координаты которой ему известны, и в результате переклички он получил только ответ от одного пилота и узнал координаты точки B, в которой тот приземлился. Длину отрезка AB снова примем за единицу измерения, т. е. $|AB| = 1$.*

Рассмотрим снова игру между командиром эскадрильи и «природой», аналогичную той, которая была в рассмотренном случае $n = 4$, т. е. «природа» снова своими действиями стремится максимизировать избыточный из-за недостатка информации путь облета, а командир эскадрильи будет стремиться минимизировать этот избыток. Рассмотрим задачу только в минимаксной постановке, так как в максиминной постановке снова получается, независимо от числа n сторон многоугольника.

Опираясь на известное уже решение в случае $n = 4$, примем сначала, что AB есть сторона искомого правильного n-угольника, и примем, что в качестве первого шага командир корабля выбирает единичный отрезок AC_1, который с отрезком AB составляет угол $\frac{\pi(n-2)}{n}$ (рис. 2, где $n = 6$).

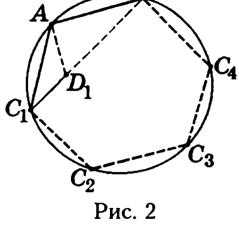

Рис. 2

Если в точке C_1 выяснится, что «да, один из кораблей приземлился в точке C_1», то опять ясно, что AB и AC_1 на самом деле стороны искомого n-угольника, дальнейший путь облета C_1C_2, C_2C_3, ..., $C_{n-2}C_{n-1}$ (C_{n-1} = B), $C_{n-1}C_n$ (C_n = A) не вызывает сомнения и при таком дальнейшем облете никакого избытка пути не получится, т. е. тогда $\gamma = 0$.

Пусть, однако, «природа» сообщает «нет, никакой корабль в точке C_1 не приземлился». Тогда командир эскадрильи может, например, предположить, что AB есть диагональ искомого n-угольника и сторона этого многоугольника AD_1 составляет с диагональю AB угол $\frac{\pi(n-3)}{n}$(рис. 3, где n=6). В этом случае командир эскадрильи летит к точке D_1. Если окажется, что в точке D_1 действительно приземлился один из кораблей, то дальнейший путь не вызывает сомнений. Он складывается из сторон многоугольника $AD_1D_2 \ldots D_{n-2}D_{n-1}$ ($B = D_{n-2}$). Длина стороны AD_1 определяется из пропорции $\frac{|AD_1|}{|AB|} = \frac{|AC_1|}{|AC_2|}$. Эта пропорция получается из подобия многоугольников $AC_1C_2 \ldots C_{n-1}$ и $AD_1D_2 \ldots D_{n-2}D_{n-1}$. Пропорция означает, что сторона AD_1 «нового» многоугольника так относится к его диагонали AB, как сторона AC_1 «старого» многоугольника относится к диагонали AC_2 этого многоугольника. Но данная пропорция означает, что точка D_1 получается из точки C_2 путем инверсии относительно окружности с центром в точке A и радиусом AB.

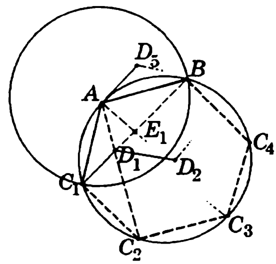

Рис. 3

Допустим, однако, что в точке D_1 выясняется что «нет, никакой корабль в этой точке не приземлился». Тогда командир корабля предполагает, что AB есть диагональ многоугольника $AE_1E_2E_{n-1}$($B = E_{n-3}$), сторона которого AE_1 составляет с этой диагональю угол $\frac{\pi(n-4)}{n}$. А длина отрезка AE_1 находится из пропорции $\frac{|AE_1|}{|AB|} = \frac{|AC_1|}{|AC_3|}$, т. е. точка E_1 получается из точки C_3 снова инверсией относительно окружности с центром в точке A радиусом AB. И т. д., вплоть до точки B.

Важно, что точки C_1, D_1, E_1, ... , B получаются из точек C_1, C_2, ..., B, лежащих на окружности $AC_1C_2...B$, *инверсией* относительно окружности с центром в точке A и проходящей через точки B и C_1. Из свойств преобразования инверсией вытекает, что такие точки C_1, D_1, E_1, ..., B лежат на прямолинейном отрезке C_1B. Отсюда выводится: если во всех точках C_1,D_1, E ..., кроме B, выясняется, что ни один из кораблей в этих точках не приземлился, то это означает, что все корабли приземлились в углах многоугольника, который отличен от многоугольника $AC_1C_2C_3...B$ и примыкает к нему по их общей стороне AB. В таком случае избыточный путь $\gamma = |C_1B| = 2\cos(\pi/n)$ и можно проверить, что это значение g и будет искомым минимаксом, т. е.

$$w^0 = 2\cos(\pi/n).$$

При этом описанные действия командира корабля и составляют оптимальную минимаксную стратегию U^0.

У нас получилось, что максимин $w_0 = 0$, минимакс $w^0 = 2\cos(\pi/n)$, т. е. $w_0 \neq w^0$. В терминах математической теории игр это означает, что рассматриваемая «игра» командира эскадрильи с «природой» в «чистых стратегиях» U и V не имеет цены $w^* = w_0 = w^0$ и седловой точки – пары оптимальных стратегий $\{U^0, V^0\}$.

Однако можно рассмотреть эту игру в «смешанных стратегиях». Тогда командир эскадрильи и «природа» строят свои действия не детерминированно, а на основе результатов некоторых вероятностных испытаний. Оказывается, что для командира эскадрильи наилучший способ действий будет таким. Сначала он делает случайное испытание по выбору на первом шаге либо отрезка AC_1, либо симметричного ему относительно прямой AB отрезка AC_1^*. Это испытание осуществляется с вероятностями $P_1 = 0{,}5$ и $P_1^* = 0{,}5$ соответственно. И по результату этого испытания дальше полет прокладывается либо по отрезку C_1B, либо по отрезку C_1^*B аналогично случаю чистых стратегий. Независимо от командира эскадрильи «природа» делает случайное испытание по выбору либо многоугольника $AC_1C_2...B$, либо многоугольника $AC_1^*C_2^*...B$ с вероятностями $Q_1 = 0{,}5$ и $Q_1^* = 0{,}5$ соответственно. Пусть $M\{\gamma\}$ есть математическое ожидание избыточной длины γ облета. Оказывается, что

$$\min_P \max_Q M\{\gamma\} = \max_Q \min_P M\{\gamma\} = \cos(\pi/n).$$

и оптимальными будут как раз вероятности $P = \{P_1 = 0{,}5,\ P_1^* = 0{,}5\}$ и $Q = \{Q_1 = 0{,}5,\ Q_1^* = 0{,}5\}$. Величина $M^0\{\gamma\} = \cos(\pi/n)$ и будет ценой игры, а указанные оптимальные вероятности $P_1 = 0{,}5$, $P_1^* = 0{,}5$ и $Q_1 = 0{,}5$, $Q_1^* =$ 0,5 определят седловую точку этой игры в смешанных стратегиях.

Если предполагать, что «игра» осуществляется не один раз, а очень много раз, то по вероятностному закону больших чисел получается, что в среднем на одну игру придется избыточный путь, сколь угодно близкий к цене игры $\cos(\pi/n)$. Это утверждение можно проверить на практике, симулируя игру на компьютере для правильных многоугольников с различным числом n сторон по соответствующей программе.

Эта сказочная задача знакомит школьника с принятием решения в рамках математической теории игр, восходящей к Дж. Фон Нейману, и притом по критерию минимума гарантированного результата, а также с понятиями минимакса и максимина и с понятием инверсии относительно окружности (или иначе – с преобразованием плоскости в обратных радиусах). Кроме того, задача знакомит с элементами теории вероятностей. Полагаю еще, что при работе с этой задачей у школьника развивается пространственное воображение и совершенствуются навыки геометрических преобразований и оценок.

Теперь я хочу рассмотреть следующую задачу, с помощью которой также проверяется (а может быть, и немного совершенствуется) пространственная интуиция школьника.

Пусть имеем некоторый эллипс с полуосями a, b (рис. 4). В этот эллипс вписан подобный ему эллипс с полуосями a_1 и b_1, т. е. $a/b = a_1/b_1$. Пусть φ угол между полуосями a и a_1, M и N – точки соприкасания эллипсов.

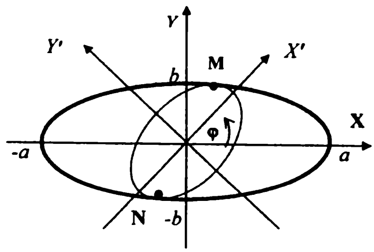

Рис. 4

Пусть угол φ изменяется и стремится к нулю. Тогда точка соприкасания M будет двигаться и, вероятно, будет двигаться к некоторой предельной точке M_0. ***Требуется по интуиции угадать положение этой точки M_0.***

Найти ее прямым построением, полагая угол φ равным 0, нельзя, так как при $\varphi = 0$ данный эллипс и вписанный в него эллипс просто совпадают, точка М рассыпается и можно сказать на современном научном языке, что происходит «катастрофа».

Есть по крайней мере 4 пути, которые предоставляют математика и информатика, для нахождения предельной точки M_0.

Первый путь – *прямая численная процедура.*

Выбираем угол $\varphi = \varphi_1$ в интервале от 0 до $\pi/2$. Варьируя полуоси a_1 и b_1, итерациями вычисляем точку соприкосновения $M(\varphi_1)$ с «разумной» точностью. Затем выбираем монотонно убывающую последовательность углов φ_k ($k = 1, 2, 3, ..., \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$). Для каждого значения φ_k вычисляем точку $M(\varphi_k)$. Руководствуясь той или иной возможной степенью точности, по последовательности $M(\varphi_k)$, выбрав k достаточно большим, вычисляем приближенно положение точки $M_0 = M(\varphi_k^*)$, где угол φ_k^* «разумно» достаточно мал. Например, выполнив подобный эксперимент при условии, что полуоси a и b идут по положительным координатным полуосям x и y и равны соответственно $a = 20$ и $b = 10$, при остановке на значении $\varphi_k^* = 0{,}06$ мы получили для точки M_0 координаты {14,127316; 7,078467}. Надо сказать, что такая процедура вычисления M_0 оказывается очень неустойчивой при значениях углов φ_k «неразумно» маленьких. Это объясняется тем, что при таких маленьких углах должны были бы оказаться близкими не только координаты самих точек $M(\varphi_k)$ и M_0, но и угловые коэффициенты касательных и значения кривизны эллипсов в этих точках. Требованиям этой близости удовлетворить не удается, если не слишком изощряться в построении искомой программы.

Кстати, догадливый школьник, сравнивая результаты вычислений, может обнаружить, что координаты x_0, y_0 точки M_0 получаются примерно такими: $x_0 \approx a/1{,}41 \approx a/\sqrt{2}$, $y_0 \approx b/1{,}41 \approx b/\sqrt{2}$.

При рассмотренной процедуре эллипсы трактуются как совокупности точек. Однако известно, что эллипсы удобно также описывать и в ***двойственной форме***, трактуя их как огибающие к совокупностям их касательных. Поиск предельного положения точки M_0 и при таком описании можно снова выполнить при помощи подходящей итерационной процедуры. Подробно рассматривать эту процедуру здесь я не буду. Отмечу только, что при малых углах φ_k она более устойчива и позволяет лучше оценить положение точки M_0. Лучшая устойчивость процедуры объясняется тем, что здесь требуется, чтобы близкими оказались лишь две характеристики эллипсов через положение их **касательных.**

Повторяя вычислительный эксперимент много раз при различных соотношениях между a и b, школьник может убедиться, что всякий раз координаты предельной точки получаются такими $x_0 \approx a/1{,}41 \approx a/\sqrt{2}$, $y_0 \approx b/1{,}41 \approx b/\sqrt{2}$. Отсюда достаточно решительный школьник может сделать вывод, что на самом деле при любых a и b выполняются строгие равенства $x_0 = a/\sqrt{2}$, $y_0 = b/\sqrt{2}$, т. е. выполненный достаточно аккуратно вычислительный эксперимент позволяет с большой достоверностью обнаружить интересную закономерность: $x_0 = a/\sqrt{2}$, $y_0 = b/\sqrt{2}$.

Третий и более «культурный» путь решения доставляют ***аналитические выкладки,*** которые используют следующие уравнения:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \tag{1}$$

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = l \qquad (0 < l < 1), \tag{2}$$

здесь (1) и (2) – уравнения для координат эллипсов в соответствующих системах координат, повернутых друг относительно друга на угол φ. Уравнения (3) и (4) выражают связь между координатами $\{x, y\}$ и $\{x', y'\}$ точки касания данного и вписанного эллипсов в этих системах координат.

$$x' = x + y\varphi, \; y' = -x\varphi + y; \tag{3}$$

$$\frac{x^2 + 2xy\varphi}{a^2} + \frac{-2xy\varphi + y^2}{b^2} = l; \tag{4}$$

При этом, выписывая уравнения (3) и (4), я не выписывал соответствующие формулы преобразования координат через $\cos(\varphi)$ и $\sin(\varphi)$, а ограничился только выражением этих тригонометрических функций, пренебрегая членами выше первого порядка в их разложениях по малому углу φ. Действительно, здесь можно не выписывать члены более высокого порядка относительно малого угла φ, так как при предельном переходе при φ, стремящемся к 0, эти члены все равно исчезнут.

Следующее уравнение (5) получается вычитанием правой и левой частей равенства (4) и (1).

$$\frac{2xy\varphi}{a^2} + \frac{-2xy\varphi}{b^2} = l - 1. \qquad (5)$$

Выражаем производную dy/dx из уравнений (1) и (5), дифференцируя по некоторому параметру:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{b^2}{a^2};$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{y}{x}.$$

Приравнивая правые части, получим из совпадения касательных в точке соприкосновения эллипсов следующее выражение (6):

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2}; \qquad (6)$$

Решая уравнения (1) и (6), получаем искомый ответ: $x_0 = a/\sqrt{2}$, $y_0 = b/\sqrt{2}$.

Приношу извинения за то, что не выписываю здесь сначала уравнения с учетом всех членов высшего порядка малости, а потом аккуратно вычисляю соответствующие пределы. Как сказано выше, эти члены высшего порядка малости я отбрасываю с самого начала, зная, что при предельном переходе они все равно исчезнут. Именно так при подобных вычислениях поступали классики. И я здесь следую их методам вычислений. Однако, если бы сохранять все члены высшего порядка малости и искать предел по всем правилам, то ответ получился бы тот же самый.

Как видим, аналитическое решение сразу приводит к строгому ответу. Однако хотелось бы получить более ясное наглядное представление, почему ответ получается именно такой. Это понимание, в чем суть дела, дает следующий наглядный ***геометрический путь*** решения.

Сделаем следующее построение. В эллипс с наклонными осями впишем эллипс, подобный исходному эллипсу, и такой, что его оси направлены снова по осям x и y (рис. 5).

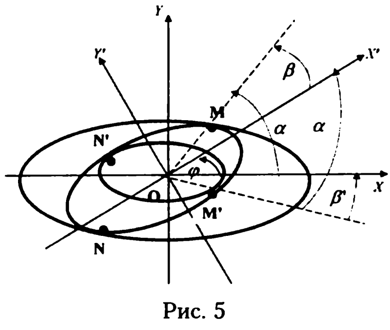

Рис. 5

Получим точки соприкосновения M' и N'. Ось x' составляет с отрезком OM' такой же угол α, какой отрезок OM составляет с осью x. Оси самого маленького эллипса повернуты относительно координатных осей x' и y' на угол $-\varphi$. Отсюда получаем, что угол $\beta=\alpha-\varphi$ равен $\beta'=\alpha-\varphi$, углу, где β есть угол, который отрезок OM составляет с осью x', а β' есть угол, который ось x составляет с отрезком OM'.

Преобразуем плоскость $\{x, y\}$, равномерно растягивая ее вдоль оси y в отношении a/b, т. е. так, чтобы самый внешний эллипс и самый внутренний эллипс обратились в окружности. При этом координатные оси x', y' преобразуются в координатные оси x'_*, y'_*. Промежуточный эллипс превратится в некоторый эллипс, касающийся полученных окружностей в некоторых точках M_*, N_*, M'_*, N'_* (рис. 6). Ясно, что отрезки OM_* и OM'_* взаимно перпендикулярны.

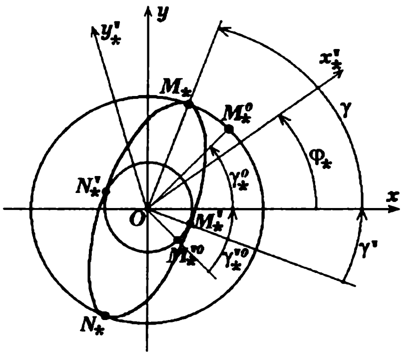

Рис. 6

При стремлении к нулю угла φ между осями x' и x, угол φ_* между осями x'_* и x будет тоже стремиться к 0. При этом угол γ, который составляет отрезок OM_* с осью x, будет стремиться к углу γ', который ось x составляет с отрезком (рис. 6). Ясно, что отрезки OM_* и OM'_*. Таким образом, получается, что

$$\gamma_0=\lim_{\varphi\to 0}\gamma=\gamma'_0=\lim_{\varphi\to 0}\gamma'.$$

Пусть при этом OM^0_* и OM'^0_* есть предельные точки для M_* и M'_*. Отрезки OM^0_* и OM'^0_* взаимно перпендикулярны и в то же время углы γ^0 и $\gamma^{0'}$ равны. Стало быть, отрезок OM^0_* составляет с осью x угол, равный $\pi/4$. Отсюда следует, что точка OM^0_* имеет координаты $x^0_*= a/\sqrt{2}$, $y^0_*=b/\sqrt{2}$. Возвращаясь к исходным координатам $\{x, y\}$, т. е. сжимая ось y^* в отношении b/a получаем, что координаты предельной точки M^0 есть $x_0=a/\sqrt{2}$, $y_0=b/\sqrt{2}$.

Полагаю, что если школьник разберется (сам или с помощью учителя) с описанными выше различными решениями данной задачи, то он на конкретном материале усовершенствует понимание понятия предела, вычислительные навыки, умение выполнять аналитические выкладки, образное мышление и навыки в геометрических построениях. Думаю также, что это будет способствовать развитию его математической интуиции.

Скажу еще несколько слов о том, как, на мой взгляд, можно оценивать прямой вычислительный путь по сравнению с аналитическим или геометрическим путями решения. Согласен с тем, что для рассмотренной сейчас задачи аналитический или геометрический пути решения являются более эффективными. Кроме того, с общей точки зрения это более «культурные» пути, так как они используют более глубокое понимание математической модели для исходной проблемы. Однако не могу согласиться с тем, что для каждой задачи прямой вычислительный путь всякий раз намного хуже, чем аналитическое или геометрическое решение. Попробую обосновать это утверждение на примере следующей задачи о «ваучерах».

Пусть имеется N предприятий (например, банков), а я имею ваучер, который могу обменять на акцию того или другого из этих предприятий. Пусть цена ваучера b. В течение года какие-то из этих предприятий преуспеют, какие-то прогорят. При этом заранее не известно, что случится с каждым из этих предприятий.

Сделаем, однако, следующее сказочное предположение. Пусть заранее известна таблица чисел $\{a(i, j_1,j_2,...,j_n).\}$, имеющая следующий смысл: числа $\{a(i, j_1,j_2,...,j_n).\}$ определяют тот доход, который я получу по истечении года, если вложу мой ваучер в i-е предприятие. Таблица имеет следующий характер: если преуспеют предприятия с какими-то номерами $j=j_k$, то соответствующие индексы j_k принимают значение 1, если прогорят предприятия с какими-то номерами $j=j_l$, то соответствующие индексы $j_l=0$. При этом индексы $j_1,j_2,...j_n$ могут принимать всевозможные значения (0 или 1), стесненные только условиями $1\le j_1+j_2+...+j_n<n$. Это означает, что *по крайней мере одно предприятие преуспеет и по крайней мере одно предприятие прогорит.* Если i-ое предприятие преуспеет, т. е. $j_i=1$, то я получу доход $a(i, j_1,j_2,...,j_n)>b$. Если i-е предприятие прогорит, т. е. $j_i=0$, то я получу доход $a(i, j_1,j_2,...,j_n)<b$. Тогда я знаю, что, вложив ваучер в i-е

предприятие, в самом неблагоприятном случае я получу доход в размере $w_i = \min\limits_{\{j_1,\dots,j_n\}} a(i, j_1,\dots,j_n) < b$. Если я человек очень осторожный, то единственно, что я могу сделать, это выбрать такое i, при котором величина w_i будет максимальной. Тогда мне будет гарантировано, что я получу доход не меньше, чем величина

$$w_* = \max_{\{i\}} w_i < b.$$

Таким образом, получается, что играть в подобные игры вряд ли следует для человека, не склонного к аферам.

Однако *пусть наряду с указанными выше предприятиями имеется некоторый инвестиционный банк. Тогда большое количество различных владельцев ваучеров могут вложить свои ваучеры в этот инвестиционный банк. И этот инвестиционный банк может вложить эти ваучеры в различные предприятия, распределяя эти ваучеры так, чтобы гарантированный доход оказался возможно больше.*

А именно, пусть в i-е предприятие инвестиционный банк вкладывает долю x_i ($0 \le x_i \le 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$) от всех ваучеров. Тогда максимальный гарантированный доход в среднем на один ваучер определяется

$$w^0 = \max_{\{x_i\}} \min_{\{j_1,\dots,j_n\}} \sum_{i=1}^{n} x_i a(i, j_1,\dots,j_n)$$

Если окажется, что, то игра с точки зрения инвестиционного банка и владельцев ваучеров «стоит свеч». Пусть тогда $d = w^0 - b > 0$. Стало быть, d – это минимальный дивиденд, который гарантирован на каждый ваучер. Тогда, если инвестиционный банк за услуги берет, например, от каждого дивиденда 10 %, то каждый владелец ваучера будет гарантирован, что по истечении года инвестиционный банк выплатит ему дивиденды не меньше чем $0{,}9\,d$. А если владелец ваучера пожелает в конце года забрать и стоимость ваучера и дивиденды, то он получит доход $w^* \ge 0{,}9\,d + b$. Разумеется, мы немного идеализировали задачу, считая, что доли x_i могут быть любыми неотрицательными действительными числами, сумма которых равна 1. Однако на самом деле все цены исчисляются в целых числах, которые выражают соответствующее количество минимальной денежной единицы. Но если количество инвесторов достаточно большое, то указанный индивидуальный доход w^* хорошо аппроксимируется реальной выплатой и оказывается близким к w^*. Таким образом, *задача сводится к вычислению величины w^0 и к вычислению оптимальных долей $\{x_i^0\}$, которые решают задачу на максимин при известной таблице чисел* $\{a(i, j_1, j_2, ..., j_n).\}$

Рассмотренная задача есть типичная задача ***выпуклого программирования***. Дадим ей геометрическую интерпретацию, полагая для наглядности, что мы имеем всего три предприятия – банка, которые занумеруем числами $j = 1,2,3$. В прямоугольной системе координат по горизонтальной оси x будем откладывать долю x_1, по горизонтальной оси y будем откладывать долю x_2. Тогда точка M на плоскости $\{x,y\}$ с координатами $\{x = x_1,\ y = x_2,\ x_1 + x_2 \le 1\}$ определит доли $\{x_1,\ x_2,\ x_3 = 1 - x_1 - x_2\}$ некоторого возможного распределения ваучеров по банкам. На вертикальной оси z будем откладывать величину дохода $w^0 = w(x_1, x_2, x_3, j_1, j_2, j_3) = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i a(i, j_1, j_2, j_3)$ который приходится на один ваучер при выборе долей x_1, x_2, x_3. При фиксированных j_1, j_2, j_3 и при перемещении точки M $= \{x_1, x_2\}$ в пределах треугольника $\{x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \le 1\}$ точка w перемещается по некоторой плоскости $P(j_1, j_2, j_3)$, уравнение которой определяется вышеприведенным равенством (рис. 7, где изображены плоскость $P(1, 0, 1)$ и плоскость $w = b$).

Перебирая всевозможные допустимые значения индексов j_1, j_2, j_3, получим соответствующее семейство плоскостей. Эти плоскости определяют нижний «свод» некоторой «палатки». Координаты высшей точки этого нижнего «свода» $N^0(x_1^0, x_2^0, w^0)$ и определяет оптимальные значения x_1^0, x_2^0, $x_3^0 = 1 - x_1^0 - x_2^0$ и w^0.

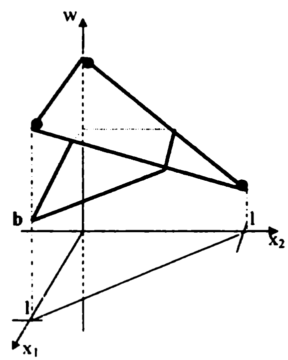

Рис. 7

Для того чтобы найти точку N^0, достаточно перебрать точки пересечения всех возможных троек плоскостей семейства

$P(j_1, j_2, j_3)$ (или, может быть, перебрать также еще точки пересечения некоторых пар плоскостей $P(j_1, j_2, j_3)$ с вертикальными плоскостями, проходящими через оси x, y и прямую $x_1 + x_2 = 1$). Это культурное решение при его вычислительной реализации может оказаться, однако, достаточно затруднительным, так как может случиться, что некоторые из плоскостей составляют друг с другом весьма малые углы. Тогда соответствующие системы уравнений будут плохо определенными.

В то же время решение задачи на минимакс величины $w(x_1, x_2, ..., x_n, j_1, j_2, ..., j_n)$ прямым перебором даже и при не очень малых, но и не слишком больших n при современной вычислительной технике оказывается вполне эффективно реализуемым. К тому же такой перебор искусный вычислитель может усовершенствовать, разумно редуцируя. А при прямом переборе уже не возникает некорректности, которые могут возникнуть при «культурном» решении. Тем самым подтверждается высказанное выше утверждение, что не всегда «культурное» решение оказывается на деле более эффективным, чем грубое решение прямым перебором.

Полагаю, что для школьника работа с задачами, подобными рассмотренной, может оказаться полезной.

Теперь я хочу обратиться к вопросу о преподавании логики в школе. В нормальной массовой школе и даже во многих классах с повышенным или углубленным изучением того или иного предмета, в том числе математики или информатики, отдельного узаконенного курса логики пока, насколько я могу судить, нет. Полагаю, что большую долю в преподавании логики должны нести курсы словесности. Однако и математика, и информатика, в свою очередь, должны иметь львиную долю в обучении школьников правильному логическому мышлению. Тем более, что и арифметика, и алгебра, и геометрия, и информатика доставляют много материала для тренировки школьников в умении давать логически ясные определения понятий, в умении четко формулировать аксиомы и теоремы, уверенно различать категории необходимости и достаточности, конструировать совершенную математическую индукцию, конструировать алгоритмы... Поэтому остановлюсь здесь на двух примерах задач, которые, на мой взгляд, способствуют развитию навыков логического мышления.

Первая из этих задач есть шуточная хорошо известная математикам *задача о неверных женах.*

В городе N проживало какое-то количество супружеских пар. Некоторые жены были неверными. Каждый муж знал о каждой из *чужих жен, верна она или неверна, о своей жене он этого не знал. Однажды в город явился Моралист. Он собрал всех мужей и сказал: «В вашем городе есть неверные жены. Их надо исправить». Мужья договорились начать размышлять утром следующего дня. Если в какой-то день некий муж приходит к убеждению, что его жена неверна, то он проводит с ней исправительную беседу и вечером этого дня сообщает остальным мужьям, что его жена была не верна, и он ее исправил. Пока некий муж сомневается, верна его жена или нет, он ничего не предпринимает. Надо найти для каждого мужа* ***разрешающее правило****, как действовать в тот или иной день.*

Это разрешающее правило можно найти по догадке, а именно:

Разрешающее правило: Если в n-й день ($n \geq 1$) некий муж видит $k \geq n$ чужих неверных жен и при этом во все предыдущие дни все мужья промолчали, то этот муж в n-й день ничего не предпринимает. Если же в n-й ($n \geq 1$) день некий муж видит $0 \leq k = n - 1$ чужих неверных жен и во все предыдущие $n_* \leq n$ дни все мужья промолчали, то этот муж в n-й день заключает, что его жена неверна, исправляет ее и вечером объявляет об этом.

Это найденное по догадке правило обосновывается методом совершенной математической индукции.

Однако данное разрешающее правило можно заставить найти компьютер на базе логического программирования, например, на языке Пролог. В этом случае уже абстрактная математическая индукция заменяется конструктивной симуляцией индукции на компьютере.

Приведу здесь простейшую программу на Прологе, которая позволяет осуществить указанную процедуру. Опускаю здесь объяснение используемых в программе предикатов, так как представляется, что смысл их понятен из их названий. В аргументах буква D используется для обозначения номера дня, буква A – как правило, для обозначения числа всех неверных жен, буква B – как правило, для обозначения числа неверных жен, которых видит тот или иной муж.

```
predicates
    be_calm(d,b)
    improve(d,b)
    image(d,b)
    may_exist(d,a)

clauses
```

```
may_exist(1,A) if
   A>0.

may_exist(D,A) if
   D>1,
   A>0,
   D1=D-1 ,
   may_exist (D1,A),
   B=A,
   B1=A-1,
   be_calm(D1,B),
   be_calm(D1,B1).

be_calm(D,B) if
   D>0,
   B >= 0,
   A=B,
   may_exist(D,A).

image(D,B) if
   D>0,
   B>=0,
   A=B,
   may_exist(D,A).

image(D,B) if
   D>0,
   B>=0,
   A=B+1,
   may_exist(D,A).

improve(D,B) if
   D>0,
   B>=0,
   image(D,B),
   not(be_calm(D,B)).
```

Поясню смысл клауз в этой программе. Первая клауза формализует тот факт, что в обществе имеется по крайней мере одна неверная жена. (Эта клауза определяет базу конструктивной индукции, реализуемой в компьютере.) Вторая клауза формализует тот факт, что реальное количество всех неверных жен A к некоторому дню D остается равным реальному количеству всех неверных жен A в предыдущий день D – 1 при условии, что ни тот муж, жена которого на самом деле не верна, ни тот муж, жена которого на самом деле верна, в этот предыдущий день не предпринимают никаких действий. (Эта клауза определяет шаг от D – 1 к D в той конструктивной индукции, которая реализуется в компьютере.) Третья клауза формализует то условие, что некий муж не должен совершать никаких действий, если есть возможность, что реальное число всех неверных жен A совпадает с количеством B тех неверных жен, которые он видит. Четвертая и пятая клаузы указывают тот возможный образ, который может увидеть тот или иной муж в некоторый день D, если до этого дня ни один из мужей не совершал никаких исправительных действий и, стало быть, промолчал во все эти предыдущие дни. Шестая клауза формализует то условие, что в некоторый день D некий муж должен совершить исправляющее действие – improve, если в этот день он не может сохранять спокойствие, так как невозможно допустить, что его жена верна.

Симуляция этой программы реализовала в компьютере конструктивную индукцию, в результате которой было выдано следующее разрешающее правило, определяющее операцию исправления improve на основании информации, доступной тому или иному мужу в тот или иной день. Это разрешающее правило представлено ниже в виде таблицы, которую выдает программа.

D=1	D=2	D=3	D=4	D=5	...
B=0	B=1	B=2	B=3	B=4	...

Таким образом, мы видим, что реализация конструктивной программы дает, как и следовало ожидать, то же самое указанное выше разрешающее правило, которое находится по интуиции и обосновывается с помощью абстрактной математической индукции.

Следующая задача построена по мотивам известной задачи о двух мудрецах. Первому сообщается только произведение a двух неизвестных натуральных чисел $x \geq 2$, $y \geq 2$, а второму – только сумма b тех же двух чисел. Происходит диалог между мудрецами, из которого следует определить a, b, x, y. Задача, которая формулируется здесь, такова.

Учитель беседует с учениками Первикиным, Вториковым и Третьяковым.

Учитель: Сейчас я передаю Первикину базу данных о некоторой группе лиц. Для каждой персоны из этой группы данные суть имя и фамилия, профессия, место рождения. Я задумал какую-то персону и сообщаю только Первикину по секрету только профессию этой персоны. Ту же базу данных я передаю Второкову и сообщаю только ему по секрету только место рождения задуманной персоны. Прошу этих обоих учеников молча сообразить, каковы имя и фамилия этой персоны.

Третьяков слышит сказанное учителем. Но он не видит данных из базы. Он слышит только, о чем эти данные. И он не слышит, какую профессию сообщил учитель Первикину и какое место рождения он сообщил Вторикову. После времени, отведенного Первикину и Вторикову для решения заданных вопросов, беседа продолжается.

Учитель: Первикин, вы можете назвать имя и фамилию задуманной персоны?

Первикин: Нет, не могу.

Учитель: А вы, Вториков, можете назвать эти имя и фамилию?

Вториков: До ответа Первикина – не мог. Но после его ответа – могу.

Первикин: Теперь после ответа Вторикова и я могу назвать имя и фамилию задуманной персоны.

Учитель: Третьяков, вы слышали наш разговор. Прошу вас составить программу для компьютера, которая реализует решение следующей задачи: Какова бы ни была введенная в компьютер конкретная база данных с компонентами «имя и фамилия, профессия, место рождения», устанавливается, какую профессию, какое место рождения мог сообщить учитель Первикину и Вторикову и каковы же могли быть имя и фамилия задуманной учителем персоны.

Приведу простейшую программу на Прологе, которая решает эту задачу.

/* Урок */

/*Объявление в первой секции баз данных с именем 'initialbase' структуры фактов внутренней исходной базы данных, которую предполагается ввести из файла */

database - initialbase

person**(symbol, symbol, symbol)**

/* Объявление во второй секции баз данных с именем 'madebase' структуры внутренней базы данных, которую предполагается пошагово получить в процессе решения */

database - madebase

/* идентификатор фактов об имеющихся в исходной базе названиях профессий */

quot_p**(symbol)**

/* идентификатор фактов об имеющихся в исходной базе названиях городов */

quot_g**(symbol)**

/* идентификатор фактов об имеющихся в исходной базе именах_фамилиях */

quot_x(symbol)

/* идентификатор фактов о результатах размышлений над множеством подходящих названий профессий по ходу диалога */

rez_1**(symbol)**

/* идентификатор фактов о результатах размышлений над множеством подходящих названий городов по ходу диалога */

rez_2**(symbol)**

/* множество возможных решений Первикина */

sol_1**(symbol, symbol)**

/* множество возможных решений Вторикова */

sol_2**(symbol, symbol)**

/* секция предикатов - объявление заголовков правил */

predicates

/* заголовки правил для ввода исходных фактов

vvod

/* заголовки правил, которые последовательно формализуют диалог */

unable_1**(symbol)**
unable_2**(symbol)**
unsolution_2**(symbol)**
solution_2**(symbol, symbol)**
unsolution_1**(symbol)**
solution_1**(symbol, symbol)**
solution**(symbol, symbol, symbol)**

/* формализованные формулировки правил задачи */

clauses

vvod **if**

/* запрос имени файла с исходной базой */

```
    write(«Введите имя файла»), readln(Name),
    /* очистка исходных фактов */
    retractall(person(_, _, _)),
    /* ввод исходных фактов из файла */
    consult(Name, initialbase).
    /* формализация первой реплики Первикина с запоминанием
отобранных для следующих обработок названий профессий */
    unable_1(P) if
    /* очистка множества фактов rez_1(_) */
    retractall(rez_1(_)), !,
    person(X, P, _),
    person(X1, P, _),
    X1<>X,
    /* запись НОВОГО названия профессии, отобранного по правилу
unable_1(P) */
    not(rez_1(P)), assertz(rez_1(P)).
    unable_2(G) if
    retractall(rez_2(_)), !,
    person(X, _, G),
    person(X1, _, G),
    X1<>X,
    not(rez_2(G)), assertz(rez_2(G)).
unsolution_2(G) if
    rez_1(P),
    rez_2(G),
    person(X, P, G),
    rez_1(P1),
    person(X1, P1, G),
    X1<>X,
    retract(rez_2(G)).
solution_2(X, G) if
    retractall(sol_2(_, _)), !,
    rez_1(P),
    rez_2(G),
    person(X, P, G),
    not(sol_2(X, G)), assertz(sol_2(X, G)).
unsolution_1(P) if
    sol_2(X, G),
    person(X, P, G),
    sol_2(X1, G1),
```

```
    X<>X1,
    person(X1, P, G1),
    retract(rez_1(P)).
solution_1(X, P) if
    retractall(sol_1(_, _)), !,
    rez_1(P),
    sol_2(X, G),
    person(X, P, G),
    not(sol_1(X, P)),
    assertz(sol_1(X, P)).
solution(X, P, G) if
    sol_1(X, P),
    sol_2(X, G),
    person(X, P, G).
```

Например, для следующей базы данных

person("mary_ivanova","programmist","e_burg")
person("mary_petrova","programmist","moskva")
person("ann_sidorova","footbolist","moskva")
person("olga_sidorova","footbolist","p_burg")
person("olga_sergeeva","umorist","moskva")
person("pavel_ivanov","tennisist","sandonato")
person("ivan_ivanov","tennisist","pervouralsk")
person("sergej_popov","plovec","sandonato")
person("petr_petrov","artist","pervouralsk")
person("ann_petrova","finansist","e_burg")

программа селектировала такую персону: **mary_ivanova, programmist, e_burg.**

Я не буду пояснять смысл клауз этой программы, так как соответствующие пояснения даны кратко в ремарках в программе. Обращу только внимание на следующую особенность программы. После каждого шага селекции программа редуцирует в соответствии с ним базу данных. Эта конструктивная операция как бы симулирует запоминание новой информации тем или иным субъектом при изучении им тех или иных фактов. В случае рассмотренной программы названное редуцирование делает программу значительно более продуктивной подобно тому, как в реальной жизни полезно в процессе обучения запоминать накапливаемую при этом обучении информацию.

Пользуясь случаем, в связи с рассмотренной программой позволю себе сделать следующий общий вывод, полезный для практики обучения школьников. Для успешной учебы важно долговременное запоминание основных изучаемых школьником фактов. А для этого важно развитие постоянной тренировкой естественной памяти у учащегося.

Я хотел бы также подчеркнуть, что важно, чтобы школьник усвоил тот факт, что общепризнанные законы логики являются результатом большого числа конкретных знаний, накопленных человечеством в процессе его развития, т. е. эти общепризнанные законы логики есть по сути дела в высшей степени совершенная упаковка памяти, накопленной человечеством веками.

Полагаю, что логическое программирование сформулированных выше задач дает возможность школьнику лучше уяснить основные логические элементы решения этих и подобных им задач. Более того, логическое программирование доказательств некоторых классических теорем из алгебры или, особенно, геометрии позволяет школьнику лучше понять, почему эти доказательства построены так, а не иначе. В связи с этим не могу не напомнить, что в свое время Феликс Клейн в его лекциях «Элементарная математика с высшей точки зрения» говорил следующее: «Школьники довольно легко выучивают цепочку умозаключений, которая составляет доказательство той или иной теоремы. Гораздо труднее дается школьнику понимание, почему эта цепочка строится так, а не иначе, а ведь именно это понимание и означает, что школьник действительно уловил суть дела». Для пояснения рассмотрю, например, следующую хорошо известную теорему.

Теорема. *Если прямая m, не лежащая на плоскости P, параллельна прямой n, принадлежащей плоскости P, то m параллельна P.*

Эта теорма доказывается в распространенном учебнике Левона Сергеевича Атанасяна с соавторами довольно *длинно*. Доказательство опирается там на лемму.

Лемма. *Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.*

В обсуждаемом учебнике геометрии в доказательстве леммы неявно используется ***пятый постулат Евклида.*** Однако известно, что в отличие от леммы пятый постулат Евклида к рассматриваемой здесь теореме ни при чем. В этом школьник может убедиться из доказательства такой теоремы в книге Алексея Васильевича Погорелова «Элементарная геометрия», или читая учебник по геометрии Александра Даниловича Александрова с соавторами, или рассматривая модели Кэли–Клейна или Пуанкаре для неевклидовой геометрии Лобачевского.

Для меня здесь также важно подчеркнуть, что хорошим подспорьем для понимания школьником структуры доказательства обсуждаемой теоремы ему полезно составить программу на Прологе доказательства от противного обсуждаемой теоремы.

В связи со сказанным расскажу здесь о следующем эпизоде обсуждения экзаменационных работ по алгебре школьников, претендующих на отличную оценку, в том числе в связи с решением вопроса о награждении золотой или серебряной медалью. При обсуждении этого вопроса учителями мне довелось присутствовать. При этом рассматривалась и такая проблема: как правильно для некоторой конкретной функции $y=f(x)$ ответить на вопрос: «Укажите множество возрастания данной функции». Предложенная непрерывная функция в соответствии с общепринятым определением была возрастающей на некотором отрезке $a \leq x \leq b$. Между учителями разгорелся спор, правильным ли будет ответ: «Множество возрастания данной функции есть открытый интервал $a < x < b$». Но ответ, что множество возрастания этой непрерывной функции есть замкнутый отрезок $a \leq x \leq b$, является неверным, потому что эта функция в точках a и b не имеет положительной производной. К этому спору привлекли меня, обратившись ко мне со следующими словами: «А как правильно по науке?» Я спросил, как они определяют «множество возрастания функции». Получил ответ: «Это такое множество значений аргумента x, на котором функция возрастает». Тогда я ответил, что, на мой взгляд, в ответ на заданный вопрос правильно будет назвать и замкнутый отрезок, и интервал, и, например, множество, состоящее из двух точек $x = c$ и $x = d$, где $a < c < d < b$. И вообще, на мой взгляд, является правильным назвать много различных множеств, которые состоят из точек, лежащих на отрезке от a до b. В ответ на это я услышал следующее замечание: «Вы не поняли, Николай Николаевич, что требуется указать самое большое множество, на котором функция возрастает». Тогда я спросил, а что значит «самое большое». Мне было сказано, что и так понятно, что речь идет о «максимальном множестве», на котором функция возрастает. Тогда я позволил себе сказать, что прежде, чем обсуждать, является ли то или иное множество, на котором функция возрастает, максимальным, надо дать определение, что значит «максимальное множество, на котором функция возрастает». Ведь можно дать по крайней мере два, вообще говоря, разных определения.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором множестве X. Можно назвать максимальным множеством, на котором функция возрастает, такое множество $X^{*} \subset X$, которое содержит всякое другое множество $X_{\bullet} \subset X$, на котором функция возрастает. Или можно назвать максимальным множеством $X' \subset X$, на котором функция возрастает, такое множество, к которому уже нельзя добавить ни одной точки, так, чтобы получилось множество $\tilde{X} \subset X$, на котором функция возрастает. На мой взгляд, если мы оцениваем ответ школьника, то по справедливости мы можем судить его строго только при условии, если просим его назвать максимальное множество, да еще и объяснили ему, что мы понимаем под максимальным множеством, на котором функция возрастает. В результате обсуждение склонилось к некоему компромиссному варианту, что в рассматриваемом конкретном случае можно ставить за работу высший балл, если в качестве множества возрастания школьник указал одно из двух множеств: $a \le x \le b$.

(У обсуждаемой непрерывной функции производная $f'(x)$ была больше нуля при $a < x < b$, предел $f'(x)$ был равен плюс бесконечности при x стремящемся к a справа, и предел $f'(x)$ был равен 0 при x, стремящемся к b слева). Строго говоря, компромисс сомнительный, но по крайней мере учитывающий трудное положение и учителей, и школьников, опутанных системой противоречивых инструкций.

Расскажу еще об одном эпизоде. Мне довелось обсуждать с учителями следующую задачу, которая была предложена на одной из наших очно-заочных областных олимпиад по математике. Задача была такова.

Дан правильный пятиугольник ABCDE. Докажите, что, какую бы точку F внутри этого пятиугольника мы ни выбрали, сумма ее расстояний до сторон многоугольника будет оставаться неизменной, независимо от выбора точки F.

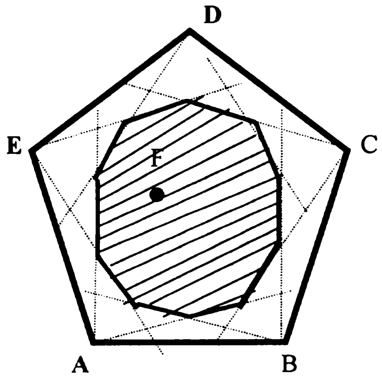

Рис. 8

Такое доказательство представило довольно большое число школьников. При этом под расстоянием от точки F до той или иной стороны (т. е. до отрезка AB, или BC, ... или EA) каждый из этих школьников понимал, по сути дела, длину перпендикуляра, опущенного из точки F на ту прямую, которая содержит эту сторону, т. е. которая содержит соответствующий отрезок. Когда я спросил у учителей, является ли разумным такое определение расстояния от точки до отрезка, то получил единодушный ответ, что именно такое определение и рекомендуется школьникам. Я спросил: «Значит, если некоторая точка лежит на прямой, на которой лежит некоторый отрезок, хотя и очень далеко от этого отрезка (в самом «обычном» смысле), то по рекомендуемому для школьника понятию «расстояние от точки до отрезка» это расстояние следует полагать равным нулю?» И получил ответ: «Да, если не пользоваться отвергаемой теперь в школе теоретико-множественной концепцией».

Однако, если под расстоянием от точки до отрезка понимать минимум расстояний от данной точки до точек, составляющих отрезок, то высказанное выше утверждение, очевидно, будет неверным. А оно будет верным только для точек F, лежащих в некотором правильном десятиугольнике, который лежит внутри данного многоугольника (рис. 8).

Хочу еще коснуться вопроса о том, как теперь в большинстве случаев складывается в школе преподавание основ математического анализа. Когда я пытаюсь поставить себя в положение школьника одиннадцатого класса, то у меня получается некоторая туманная картина. Поясню, что я имею в виду на конкретном примере.

Пусть мы изучаем функцию $y=\ln(x)$. В предыдущих классах школьнику дается определение величины $\beta=\log_a(n)$. Согласно этому определению $n=a^\beta$. Если β есть число рациональное $\beta=p/q$, то что такое a^β школьнику более или менее ясно, если он к тому же ясно понимает, о каком числе a идет речь. Если же β – число иррациональное, то школьник слышит некие словесные пояснения, которые, по сути дела, используют понятия «предел» и «непрерывность». Но, за исключением учащихся из сравнительно небольшого количества школьных классов, эти понятия остаются для школьников туманными. Когда к тому же заходит речь о натуральном логарифме, т. е. $\log_e(x)$, то туман еще сгущается, так как еще и число e либо определяется для школьника как некое таинственное число, которое больше 2, но меньше 3, либо в классах с более или менее углубленным изучением математики число e определяется как второй замечательный предел. А формула для производной ($\ln'(x)=1/x$) в школе либо предлагается как таковая, либо выводится, но неизбежно так, что многие шаги этого вывода опять же для многих школьников остаются плохо понятными.

Я проводил следующий эксперимент. Спрашивал, нельзя ли дать какое-нибудь наглядное представление о том, что такое число e. И ни разу не получил, например, такого ответа: «e – это такое число, что площадь фигуры, ограниченной осью x, прямой $x=1$, прямой $x=e$ и линией $y=1/x$, равна 1» (рис. 9). Впрочем, может быть, я формулировал мой вопрос неудачно. Однако, я полагаю, что такой наглядный образ числа e полезно со школьниками обсуждать.

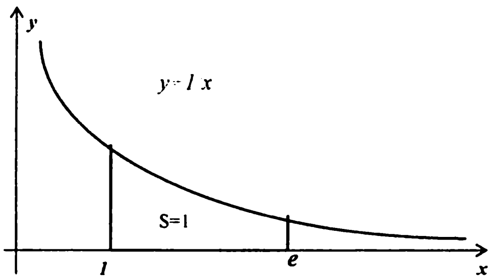

Рис. 9

В связи со сказанным мне хотелось неоднократно попробовать рассмотреть со школьниками следующий, рекомендованный Феликсом Клейном в его лекциях «Элементарная математика с высшей точки зрения», путь изучения показательной функции $y=e^x$ и функции $y=\ln(x)$, при котором сначала определяется функция $y=\ln(x)$ как $\ln(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$, $x>0$, а показательная функция $y=e^x$ определяется как функция, обратная к логарифмической функции $y=\ln(x)$. У нас в общепринятых школьных курсах, наоборот, считается естественным сначала определить функцию $y=e^x$, а потом определять функцию $y=\ln(x)$ как функцию ей обратную. Трудно не согласиться с Клейном, что предлагаемый им путь является гораздо более наглядным и, пожалуй, легче обосновать, если, конечно, более или менее просто и ясно в школе изучать не так называемые основы математического анализа, а просто основы дифференциального и интегрального исчисления. Кстати, если школьник приучен к наглядным геометрическим образам и к простейшим преобразованиям плоскости (например, ее равномерного растяжения или сжатия в каком-нибудь направлении), то можно определять функцию $y=\ln(x)$ и до понятия интеграла и производной, определяя функцию $y=\ln(x)$ как площадь s указанной выше фигуры, причем полагать площадь s положительной при $x>1$ и полагать s отрицательной при $x<1$. Мне представляется, что такой путь, который, как я знаю, многие учителя считают неподходящим, при условии, что школьник хорошо подготовлен в геометрии, заслуживает внимания.